Journal of Quality Engineering and Management

www.pqprc.ir

J. Qual. Eng. Manag. Vol. 14, No. 1 (2024) 68–78.

Paper Type: Original Article

# The Optimization of Process Target Means in Different Markets

**Mohammad Saber Fallah Nejad[1,*], Hossein Tarafdar[1], Leila Hosseini[1]**

[1] Department of Industrial Engineering, Yazd University, Yazd, Iran; fallahnezhad@yazd.ac.ir; hossein.tarafdar@gmail.com; lysahoseini@gmail.com.

**Citation:**

| | |
|---|---|
| *Received: 07 November 2023*<br>*Revised: 02 February 2024*<br>*Accepted: 12 April 2024* | Fallah Nejad, M. S., Tarafdar, H., & Hosseini, L. (2024). The optimization of process target means in different markets. *Journal of quality engineering and management, 14* (1), 68-78. |

## Abstract

**Purpose:** Calculating the optimal target mean for a process is recognized as an essential research area, with many proposed models in the literature. Previous studies have typically focused on a single market. The main difference in this research lies in the number of markets considered; unlike previous works, this study examines n different markets simultaneously.

**Methodology:** This study aims to determine the optimal process quality mean for a limited number of markets based on the target values of quality characteristics in each market. We propose a model to calculate this optimal mean across n markets with different price/cost structures. A key innovation of this research is the incorporation of probability distributions that reflect the likelihood of the quality characteristic falling within specific quality ranges in each market.

**Findings:** The model considers the probability that the quality characteristic falls within each market's defined quality range. To analyze and solve the model, absorbing Markov chains are used. A numerical example is presented in which the model is applied to two markets, and the optimal target mean and corresponding optimal revenue are obtained.

**Originality/Value:** Based on the results from the numerical example, the optimal target mean and revenue were determined for the two markets. A sensitivity analysis was conducted to assess the influence of various model parameters on these parameters, demonstrating how changes in parameters impact the model's outcomes.

**Keywords:** Optimization, Quality, Market, Absorbing Markov chain, Taguchi loss function.

Corresponding Author: fallahnezhad@yazd.ac.ir

10.48313/jqem.2025.215014

Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

**مهندسی و مدیریت کیفیت**

www.pqprc.ir

دوره ۱۴، شماره (۱)، (۱۴۰۳) ۷۸-۶۸

**نوع مقاله: پژوهشی**

# تعیین میانگین بهینه مشخصه‌کیفی برای تنظیم فرآیند در حالت وجود بازارهای متفاوت

**محمد صابر فلاح‌نژاد[۱،*]، حسین طرف‌دار[۱]، لیلا حسینی[۱]**

[۱]گروه مهندسی صنایع، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

## چکیده

**هدف:** محاسبه مقدار بهینه میانگین هدف برای یک فرآیند، به‌عنوان یک زمینه مهم تحقیقاتی شناخته شده است و مدل‌های پیشنهادی بسیاری در ادبیات موضوع درباره این مبحث وجود دارد. اکثر پژوهش‌های پیشین تنها یک بازار را بررسی کرده‌اند، اما در این پژوهش تفاوت اساسی در بررسی هم‌زمان چندین بازار (بازار متفاوت $n$) است.

**روش‌شناسی پژوهش:** هدف این پژوهش، یافتن مقدار بهینه میانگین کیفیت فرآیند برای تعداد محدودی بازار و بر اساس مقدارهای هدف مشخصه‌کیفی در هر بازار است. در این راستا، مدلی برای محاسبه مقدار بهینه در $n$ بازار با ساختارهای قیمت/هزینه متفاوت معرفی شده است. نوآوری اصلی پژوهش در لحاظ کردن هم‌زمان چند بازار با ویژگی‌های متفاوت و درنظر گرفتن احتمالات حضور مشخصه‌کیفی کیفیت در هر یک از محدوده‌های کیفیتی بازارهاست.

**یافته‌ها:** در این مدل، برای قرار گرفتن مشخصه‌کیفی کیفیت در هر یک از محدوده‌های کیفیت بازارها، احتمال‌هایی درنظر گرفته شده که هر یک نشان‌دهنده شانس قرارگیری کیفیت در آن محدوده خاص است. برای تحلیل و حل مدل، از زنجیره‌های مارکوفی جاذب استفاده شده است. در بخش مثال عددی، مدل برای دو بازار پیاده‌سازی شد و نتایج بهینه از جمله میانگین هدف و درآمد محاسبه گردید.

**اصالت/ارزش‌افزوده علمی:** با توجه به نتایج به‌دست آمده، مقدار بهینه میانگین هدف و درآمد بهینه برای دو بازار مشخص شد. برای بررسی تاثیر پارامترهای مختلف مدل بر روی نتایج، تحلیل حساسیت انجام شد که نشان داد تغییر در پارامترهای مدل چگونه می‌تواند بر مقدار بهینه میانگین هدف و درآمد بهینه اثرگذار باشد.

**کلیدواژه‌ها:** بهینه‌سازی، کیفیت، بازار، زنجیره مارکوف جاذب[۱]، تابع زیان تاگوچی[۲].

## ۱- مقدمه

اجازه بدهید که فرآیند تولیدی را درنظر بگیریم که به‌صورت پیوسته در حال تولید می‌باشد. همچنین حدود تلرانسی $Y$ را درنظر بگیرید که برای مشخصه‌کیفی موردنظر وجود دارد. حال اگر مشخصه‌کیفی موردنظر در یکی از این حدود تلرانسی موردنظر قرار بگیرد امکان روی‌دادن چند حالت متفاوت وجود دارد؛ به‌طور مثال امکان باز فرآوری، فروش و یا دور ریزی است. این مشخصه‌کیفی می‌تواند وزن، حجم، تعداد و یا غلظت درنظر گرفته شود. ما در اینجا $\mu$ را به‌عنوان میانگین درنظر می‌گیریم به‌طوری که هزینه مورد انتظار بر هر آیتم به‌حداقل برسد. این مساله به صورت‌های

[1] Absorbing Markov chain

[2] Taguchi

متفاوت و توسط افراد بسیاری موردبررسی و تحقیق قرار گرفته است. هانتر و نارتا [1] مساله انتخاب مقدار بهینه میانگین فرآیند را زمانی که آیتم‌های غیرمنطبق را با یک هزینه کاهش‌یافته به‌فروش می‌روند موردتوجه قرار داده‌اند. بیسگارد و همکاران [2] مدل هانتر و نارتا [1] را گسترش داده‌اند، به این صورت که آیتم‌های غیرمنطبق در سطح قیمتی متناسب با مقدار ماده به‌کار رفته در آن به‌فروش می‌رود. گلهر [3] مساله انتخاب مقدار بهینه میانگین فرآیند را در فرآیند تولید کنسرو موردبررسی قرار داده است.

بوچر و جعفری [4] و السلطان [5] شرایطی را موردبررسی قرار دادند که در آن آیتم‌ها تحت پذیرش نمونه‌ای دسته-دسته[1] به‌جای بازرسی کامل قرار گرفتند. تنگ و لو [6]، هونگ و همکاران [7]، لی و همکاران [8] و لی و الساید [9] مقدار بهینه میانگین فرآیند و محدودیت‌های غربال‌گری را وقتی‌که متغیر جانشین در بازرسی مورداستفاده قرار گرفته است را محاسبه کرده‌اند. رحیم و السلطان [10] رحیم و توفاها [11] از تابع زیان تاگوچی برای محاسبه مقدار بهینه هدف فرآیند استفاده کرده‌اند. کیم و همکاران [12] مدلی برای محاسبه مقدار بهینه هدف فرآیند با درنظر گرفتن کاهش واریانس و ظرفیت فرآیند پیشنهاد کرده‌اند. چو [13] و فیلیپس و چو [14] مساله هدف فرآیند را شرایطی که توزیع فرآیند اریب و شرایط غیرنرمالیتی باشد موردبررسی قرار داده‌اند. آرسلوس و رحیم [15] و [16] و فراواراپورگ و چو [13] مسایل هدف فرآیند را تحت شرایطی که چند مشخصه‌کیفی به‌طور هم‌زمان درنظر گرفته شوند، موردبررسی قرار داده‌اند به این دلیل که محصولات غالبا بر اساس بیش از یک مشخصه‌کیفی مورد قضاوت و بازرسی قرار می‌گیرند. رحیم و همکاران [17] انتخاب مقرون به‌صرفه‌ترین میانگین هدف و واریانس برای فرآیند تولید پیوسته را موردبررسی قرار داده‌اند.

بولینگ و همکاران [18] مدلی را برای سطح‌های هدف فرآیند در چارچوب فرآیند تولید سریال چند مرحله توسعه داده‌اند. کیس و بنت [19]، اون و چو [20]، کانازوکا [21]، تانگ و اسنایدر [22] و تسای و همکاران [23] اثرهای آماری و اقتصادی ناشی از خطاهای اندازه‌گیری در برنامه‌های پذیرش نمونه، نمودارهای کنترل فرآیند و دیگر برنامه‌های بازرسی را موردمطالعه قرار داده‌اند. همچنین چن و چونگ [24] و هونگ و الساید [25] تاثیر خطاهای اندازه‌گیری بر مقدار بهینه میانگین هدف برای یک فرآیند پر شدن را موردبررسی قرار داده‌اند و دوفوا و سیدیکوی [26] مقدار بهینه میانگین فرآیند را با درنظر گرفتن گزینه‌های غربال‌گری سه‌طبقه‌ای به‌دست آورده‌اند. سونگ و بیونگ [27] مقدار بهینه فرآیند و محدودیت‌های تلرانس با خطاهای اندازه‌گیری را تحت تصمیم‌گیری چندگانه موردبررسی قرار داده‌اند. چونگ و مین [28] مقدار بهینه میانگین فرآیند را بر اساس تابع زیان درجه دوم از کیفیت و طرح بازرسی تصحیح‌شونده به‌دست آورده‌اند. لی و همکاران [29] مقدار بهینه هدف فرآیند را برای یک فرآیند تولید چند محصولی محاسبه کرده‌اند. چونگ و میکاییل [30] مقدار بهینه میانگین فرآیند و تنظیمات مقدار تولید را برای سیستم‌های تولید سریالی تحت تابع زیان کیفیت و طرح بازرسی تصحیح شونده به‌دست آورده‌اند. پاول و بیانگ [31] به‌منظور شناسایی یک مشخصه فاکتور فضا مساله بهینه میانگین فرآیند را برنامه‌نویسی معکوس کرده‌اند. درویش و همکاران [32] انتخاب مقدار بهینه میانگین فرآیند را برای یک مدل موجودی در حالت احتمالی موردبررسی قرار داده‌اند.

هدف ما در این مقاله به‌دست آوردن مقدار بهینه میانگین هدف یک فرآیند می‌باشد در شرایطی که ما دارای بازارهای محدودی برای عرضه محصول خود می‌باشیم. همچنین اخیرا بولینگ و همکاران [18] و فلاح نژاد و حسینی نسب [33] و فلاح نژاد و نیاکی [34] مدل‌های مارکوفی را برای مساله تعیین میانگین بهینه توسعه داده‌اند ولی تحقیق فعلی به دلایل زیر از تحقیقات قبلی متمایز است:

۱. در همه مقالات فوق تنها یک نوع بازار درنظر گرفته شده است در حالی که در مقاله فعلی دو نوع بازار برای فروش محصول وجود دارد.
۲. در تمام مقالات فوق سود فروش یک واحد محصول ثابت است در حالی که در مقاله فعلی سود فروش محصول نه‌تنها در بازارهای متفاوت یکسان نیست بلکه تابعی از امید ریاضی شرطی مشخصه‌کیفی با توجه حدود تلرانسی هر نوع بازار می‌باشد.
۳. در مقالات فوق هزینه تولید ثابت درنظر گرفته شده است در حالی که در مقاله فعلی هزینه تولید تابعی از میانگین مشخصه‌کیفی می‌باشد.
۴. در هیچ‌کدام از مقالات فوق هزینه تابع زیان تاگوچی درنظر گرفته نشده است در حالی که در مقاله فعلی هزینه تابع زیان تاگوچی با توجه حدود تلرانسی هر نوع بازار درنظر گرفته شده است.

[1] Lot-by-lot acceptance sampling

ما در این مقاله یک مشخصه‌کیفی را برای مشخص کردن بازار موردنظر برای هر محصول درنظر گرفتیم و با استفاده از تابع زیان تاگوچی مقدار بهینه میانگین هدف را با هدف حداقل کردن هزینه‌ها به‌دست آورده‌ایم. در حقیقت در این مقاله شرایطی جدیدی لحاظ شده است که به شرایط موجود در دنیای واقعی نزدیکی زیادی دارد و آن درنظر گرفتن تعداد محدود بازار می‌باشد. از دیگر موارد جدید به‌کار رفته در این زمینه که در این مقاله مورداستفاده قرار گرفته استفاده از زنجیره‌های مارکوفی جاذب و همچنین وارد کردن بحث احتمال در محاسبات می‌باشد که این خود یکی از شرایطی می‌باشد که مقاله را به شرایط دنیای واقعی نزدیک کرده است.

در ادامه در بخش ۲ به معرفی مدل اقتصادی پیشنهادی و رویکردهای استفاده شده می‌پردازیم؛ در بخش ۳ مثال عددی، محاسبات و آنالیز حساسیت بر روی پارامترها آورده شده است؛ در بخش انتهایی، بخش ۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادها آتی ذکر شده است.

## ۲- مدل اقتصادی پیشنهادی و رویکردهای به‌کار گرفته شده

### ۲-۱- زنجیره مارکوف جاذب

در این مقاله ابتدا برای درک بیشتر مساله موردبررسی، زنجیره مارکوف و مدل پیشنهادی برای ۲ بازار بررسی قرار می‌گیرد و در ادامه به $n$ بازار تعمیم داده می‌شود. یک سیستم تک‌مرحله‌ای مانند **شکل ۱** را درنظر بگیرید.

حال ماتریس احتمال انتقال برای یک سیستم تک‌مرحله‌ای مانند **ماتریس (۱)** قابل‌بیان می‌باشد [33]:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (۱)$$

جایی که $p_{11}$ نشان‌دهنده احتمال دوباره‌کاری، $p_{12}$ احتمال فروش محصول به بازار اول، $p_{13}$ احتمال فروش به بازار دوم و $p_{14}$ احتمال اسقاطی شدن محصول تولیدی است. فرض کنید مشخصه‌کیفی دارای توزیعی مانند **شکل ۱** باشد درنتیجه هر یک از احتمال‌های گفته‌شده به‌صورت **رابطه (۲)** تا **رابطه (۵)** بیان می‌شوند [33] و [34]:

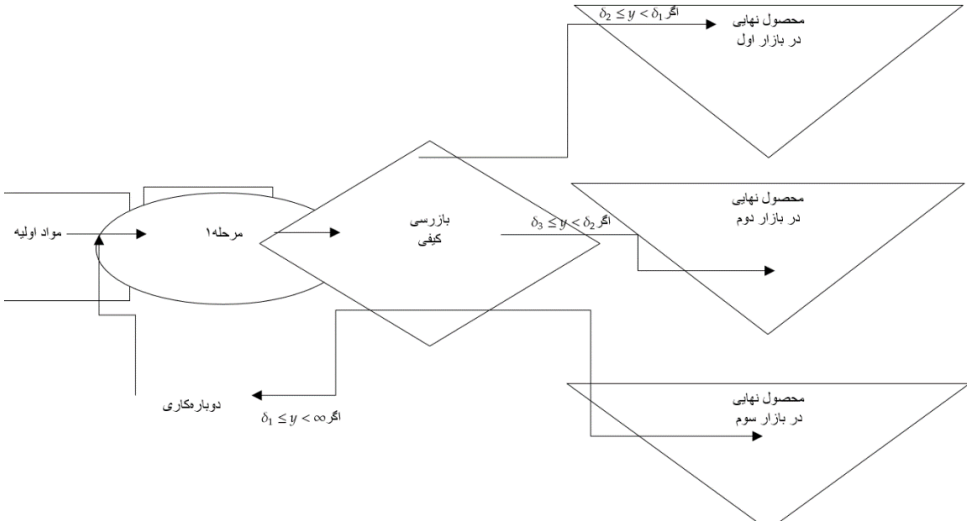
$$p_{11} = \int_{\delta_1}^{\infty} g(y)d_y. \qquad (۲)$$

$$p_{12} = \int_{\delta_2}^{\delta_1} g(y)d_y. \qquad (۳)$$

$$p_{13} = \int_{\delta_3}^{\delta_2} g(y)d_y. \qquad (۴)$$

$$p_{14} = \int_{-\infty}^{\delta_3} g(y)d_y. \qquad (۵)$$

$g(y)$ تابع چگالی احتمال توزیع نرمال مشخصه‌کیفی $Y$ با میانگین نامعلوم $\mu_y$ و واریانس معلوم $\sigma_y$ می‌باشد.




**شکل ۱- فرآیند تک‌مرحله‌ای تولید محصول.**

**Figure 1- Single-step product manufacturing process.**

همان‌طور که مشاهده می‌کنید ماتریس $P$ یک زنجیره مارکوف جاذب با حالت‌های جاذب: ۱- فروش محصول به بازار اول، ۲- فروش محصول به بازار دوم و ۳- حالت اسقاطی شدن و حالت گذرای دوباره‌کاری می‌باشد. آنالیز کردن این زنجیره مارکوف جاذب نیازمند دوباره چیدمان کردن ماتریس احتمال تک‌مرحله‌ای مشابه **رابطه (۶)** می‌باشد [33] و [34]:

$$P = \begin{bmatrix} A & O \\ R & Q \end{bmatrix}. \qquad (۶)$$

درنتیجه چیدمان جدید ماتریس $P$ بر اساس آنچه گفته شد به‌صورت **ماتریس (۷)** به‌دست می‌آید:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{11} \end{bmatrix}. \qquad (۷)$$

ماتریس پایه‌ای $M$ که به‌صورت یک ماتریس یک در یک در این مورد لحاظ می‌شود دارای عضوی به‌صورت **رابطه‌ی (۸)** می‌باشد [33] و [34]:

$$M = \ I - Q)^{-1} = m_{11} = \frac{1}{1-p_{11})}. \qquad (۸)$$

جایی که $I$ یک ماتریس واحد می‌باشد. مقدار $m_{11}$ نشان‌دهنده تعداد مورد انتظار از زمان‌هایی در بلندمدت که حالت گذار دوباره‌کاری قبل از اتفاق افتادن جذب اشغال می‌شود. ماتریس احتمال جاذب بلندمدت $F$، به‌صورت **ماتریس (۹)** محاسبه می‌شود [33] و [34]:

$$F = M \times R = 1\left[\frac{p_{12}}{(1-p_{11})} \ \frac{p_{13}}{(1-p_{11})} \ \frac{p_{14}}{(1-p_{11})}\right]. \qquad (۹)$$

عناصر ماتریس $F$، $f_{12}$، $f_{13}$ و $f_{14}$ احتمال‌های این می‌باشند که به ترتیب محصول در بازار ۱ یا در بازار ۲ پذیرفته شود یا اسقاط گردد. حال اگر بخواهیم تمام رابطه‌های مربوط به‌ماتریس احتمال انتقال $P$، رابطه‌های مربوط به احتمال‌های $p_{ij}$، چیدمان جدید ماتریس $P$، ماتریس پایه‌ای $M$ و ماتریس احتمال جاذب بلندمدت $F$ را برای $n$ بازار تعمیم دهیم به ترتیب به **رابطه (۱۰)** تا **رابطه (۱۵)** خواهیم رسید:

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1(n-1)} & p_{1n} & p_{1(n+1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (۱۰)$$

که $p_{11}$ نشان‌دهنده احتمال دوباره‌کاری، هرکدام از $p_{ij}$ برای $j = 2, \dots, n$ احتمال فروش به بازار $jth$ است و $p_{1(n+1)}$ احتمال اسقاطی شدن محصول تولیدی است. که مقدار هرکدام از **رابطه (۱۱) تا رابطه (۱۳)** به‌دست می‌آیند:

$$p_{11} = \int_{\delta_1}^{\infty} g(y)d_y. \qquad (۱۱)$$

$$p_{1j} = \int_{\delta_j}^{\delta_{j-1}} g(y)d_y \qquad j = 2, \dots, n. \qquad (۱۲)$$

$$p_{1(n+1)} = \int_{-\infty}^{\delta_n} g(y)d_y. \qquad (۱۳)$$

چیدمان جدید ماتریس $P$ به‌صورت **رابطه (۱۴)** است:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1(n-1)} & p_{1n} & p_{1(n+1)} & p_{11} \end{bmatrix}. \qquad (۱۴)$$

ماتریس پایه‌ای $M$ به‌صورت **رابطه (۸)** است.

ماتریس احتمال جاذب بلندمدت $F$ به‌صورت **رابطه (۱۵)** به‌دست می‌آید:

$$F = M \times R = 1\left[\frac{p_{12}}{1-p_{11)}} \quad \frac{p_{13}}{1-p_{11)}} \dots \frac{p_{1n}}{1-p_{11)}} \quad \frac{p_{1(n+1)}}{1-p_{11)}}\right]. \qquad (۱۵)$$

عناصر ماتریس $F$، $f_{11}$، $f_{12}$ ... $f_{1n}$ احتمال‌های این می‌باشند که به ترتیب محصول در بازار $1, 2, \dots, n$ پذیرفته شوند و $f_{1(n+1)}$ احتمال اسقاط است.

## ۲-۲- مدل اقتصادی پیشنهادی

در مدل پیشنهادی، مشخصه‌کیفی درنظر گرفته‌ایم که با $Y$ آن را مشخص می‌کنیم. فرض شده که این مشخصه‌کیفی دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_y$ و مقدار واریانس مشخص $\sigma_y^2$ است. حالتی را فرض کنید، محصولی که تولید می‌شود می‌تواند در بازارهای متفاوت به‌فروش رسد که در این مقاله تعداد بازارها را $n$ لحاظ شده است. حال در یک فرآیند تولیدی با توجه به تمام عوامل شناخته‌شده و نشده‌ای که وجود دارد و غیرقابل‌انکار هستند، محصولات تولیدی در این فرآیند از سطح کیفی یکسانی برخوردار نمی‌باشند. با توجه به اینکه هر بازاری خواستار چه نوع محصولی است، به این معنی که محصول در چه سطحی از کیفیت باشد برای هر بازار یک محدوده خاص درنظر گرفته‌ایم و قرار گرفتن مشخصه‌کیفی مدنظر در هر یک از این بازه‌ها به این مفهوم می‌باشد که محصول موردنظر به آن بازار فروخته می‌شود و درعین حالی که این اتفاق روی می‌دهد یک سری هزینه‌ها و درآمدها درنظر گرفته می‌شود. زمانی که ما محصولی را به بازاری به‌فروش می‌رسانیم سودی از این فروش به‌دست می‌آوریم معادل $A_i$ و همچنین اگر ما در هر بازار دارای مقدار هدفی $\tau_j$ برای مشخصه‌کیفی $Y$ باشیم به ازای $y < \tau$ زیانی به مقدار $C_i = a_j\ y - \tau)^2$ ناشی می‌شود که تابع درجه دومی از $(\tau - y)$ است که در آن $y$ مقدار مشاهده‌شده $Y$ و $a_j$ ثابتی مثبت می‌باشد، این تابع زیان پیشنهادی توسط تاگوچی است [27]. اگر $\delta_2 \le y <$ $\delta_1$ر ، در این صورت محصول به بازار اول فروخته می‌شود. اگر $\delta_3 \le y < \delta_2$، آنگاه محصول به بازار دوم تخصیص داده می‌شود و به همین صورت

برای $n$ بازار دیگر و اگر $y \geq \delta_1$ یا $y \leq \delta_n$ باشد به ترتیب محصول اسقاط یا برای دوباره‌کاری به کارخانه بازمی‌گردد به‌طوری که $\delta_{n+1} < \delta_n < \delta_{n-1} < \cdots < \delta_2 < \delta_1$. با توجه به هدف مقاله که به‌دست آوردن مقدار بهینه میانگین هدف فرآیند است و با توجه به پارامترهای آورده شده در ادامه مقدار درآمد مورد انتظار($EP$) بر اساس **رابطه (۲۱)** به‌دست می‌آید.

**پارامترها**

| | |
|---|---|
| $y$ | مقدار مشاهده‌شده برای مشخصه‌کیفی $Y$. |
| $A_j$ | مقدار سود حاصل از فروش محصول به بازار $jth$. |
| $a_j$ | مقدار زیان حاصل از انحراف از مقدار هدف $\tau_j$ در بازار $jth$. |
| $c_0$ | هزینه ثابت تولید [2]. |
| $c_1$ | هزینه متغیر تولید [2]. |
| $s_y$ | هزینه بازرسی مشخصه‌کیفی $Y$. |
| $\tau_j$ | مقدار هدف مشخصه‌کیفی در بازار $j$. |

مقدار سود مورد انتظار از **رابطه (۱۶)** به‌دست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \times f_{1j} \times E\left(y \middle| \delta_{j+1} \leq y < \delta_j\right), \quad (۱۶)$$

که در **رابطه (۱۶)**، مقدار $E\left(y \middle| \delta_{j+1} \leq y < \delta_j\right)$ به ازای $j = 1,2,\ldots,n$ ، برابر با امید ریاضی شرطی مشخصه‌کیفی، در شرایطی که در هر یک از بازه‌های کیفی مربوط به بازارها قرار بگیرد است که مقدار آن از **رابطه (۱۱)** به‌دست می‌آید:

$$E\left(y \middle| \delta_{j+1} \leq y < \delta_j\right) = \frac{\int_{\delta_{j+1}}^{\delta_j} y g(y) d_y}{\int_{\delta_{j+1}}^{\delta_j} g(y) d_y}. \quad (۱۷)$$

بنابراین مقدار سود مورد انتظار بعد از ساده‌سازی با توجه به **رابطه (۱۱)** تا **رابطه (۱۶)** و همچنین **رابطه (۱۷)** به‌صورت **رابطه (۱۸)** است:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \times \frac{\int_{\delta_{j+1}}^{\delta_j} y.g(y) d_y}{1-\int_{\delta_1}^{\infty} g(y) d_y}. \quad (۱۸)$$

جایی که g(y) تابع چگالی احتمال توزیع نرمال مشخصه‌کیفی $Y$ با میانگین نامعلوم $\mu_y$ و واریانس معلوم $\sigma_y$ است. هزینه تولید به هر محصول برابر با **رابطه (۱۹)** است:

$$c_0 + c_1 y. \quad (۱۹)$$

درنتیجه هزینه تولید مورد انتظار بر هر محصول از **رابطه (۲۰)** به این صورت است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c_0 + c_1 y) g\ y) d_y = c_0 + c_1 \mu_y. \quad (۲۰)$$

هزینه جریمه مورد انتظار در بازار $jth$ ناشی از تفاوت با مقدار هدف $\tau_j$ مشخصه‌کیفی بر اساس **رابطه (۲۱)** به‌دست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\tau_j - y\right)^2 g\ y) d_y. \quad (۲۱)$$

درنتیجه بر اساس **رابطه (۱۸)** تا **رابطه (۲۱)** مقدار درآمد مورد انتظار به هر محصول، به‌صورت **رابطه (۲۲)** است:

$$EP = \left( \sum_{j=1}^{n} A_j \times \frac{\int_{\delta_{j+1}}^{\delta_j} y.g(y)d_y}{1-\int_{\delta_1}^{\infty} g(y)d_y} \right) - \left(c_0 + c_1\mu_y + s_y + \sum_{j=1}^{n} a_j\left(\tau_j - y\right)^2 g\ y)d_y\right). \quad (۲۲)$$

## ۳- مثال عددی

### ۳-۱- مقدارهای پارامترها

در این بخش برای توجیه مدل اقتصادی پیشنهادی یک مثال عددی گنجانده و سعی بر آن شده است که مقدار پارامترهای موجود در مدل در این مثال تا حد ممکن به مقدارهای در دنیای واقعی نزدیک باشد، درضمن در این مثال تعداد بازارها محدود به ۲ شده است. بر این اساس مقدارهای پارامترها در **جدول ۱** آورده شده است.

**جدول ۱- مقدار اولیه پارامترهای موجود در مدل اقتصادی پیشنهادی.**
**Table 1- Initial values of parameters in the proposed economic model.**

| پارامتر | مقدار عددی |
|---|---|
| $A_1$ | 150 |
| $A_2$ | 100 |
| $a_1$ | 20 |
| $a_2$ | 10 |
| $c_0$ | 1000 |
| $c_1$ | 20 |
| $s_y$ | 700 |
| $\tau_1$ | 40 |
| $\tau_2$ | 25 |

درضمن در این مثال، توزیع نرمال مشخصه‌کیفی $Y$ با $\mu_y = 0$ و واریانس $\sigma_y = 1$ درنظر گرفته شده است و همچنین مقدار حدود در **جدول ۲** آورده شده است.

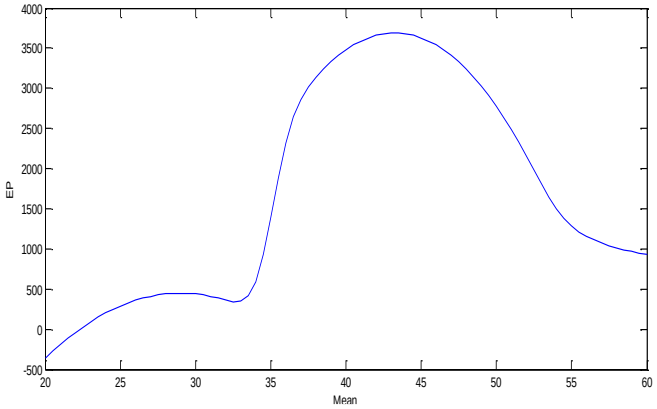
**جدول ۲- مقدارهای حدود برای ۲ بازار.**
**Table 2- Boundary values for 2 markets.**

| حد | مقدار عددی |
|---|---|
| $\delta_1$ | 55 |
| $\delta_2$ | 35 |
| $\delta_3$ | 15 |

### ۳-۲- محاسبات

در این مقاله برای محاسبه مقدار بهینه میانگین هدف بر اساس تابع به‌دست آمده از **رابطه (۲۲)**، مقدار تابع درآمد را در نرم‌افزار مطلب کدنویسی کرده و چون هدف تابع، افزایش درآمد است بنابراین نمودار درآمد برحسب میانگین را رسم کرده و بر اساس نقطه ماکزیمم به‌دست آمده، مقدار بهینه درآمد و همچنین میانگین را به‌دست آوردیم که نمودار موردنظر را در **شکل ۲** مشاهده می‌کنید.

روش‌های مختلفی برای بهینه‌سازی مدل‌های غیرخطی وجود دارد. روش گرادیان برای حل این مدل‌ها مناسب می‌باشد [18]. در این مقاله ابتدا با استفاده از ترسیم تابع هدف، بازه‌ای تعیین‌شده است که بنابر ترسیم گرافیکی شامل جواب بهینه خواهد بود و سپس با استفاده از الگوریتم‌های جستجو در آن بازه، مقدار بهینه متغیرتصمیم با دقت ۰/۰۱ تعیین‌شده است.




**شکل ۲- نمودار EP برحسب μ.**

**Figure 2- EP diagram in terms of μ.**

درنتیجه مقدار بهینه میانگین هدف و درآمد بهینه به ترتیب برابر با $\mu^* = 43/5$ و $EP^* = 3690$ است.

### ۳-۳- تحلیل حساسیت

برای بررسی تاثیرگذاری پارامترهای موجود در مدل اقتصادی در این مقاله بر روی پارامترهای مدل تحلیل حساسیت انجام شد؛ بدین ترتیب که با افزایش و کاهش ۲۰٪ و ۵۰٪ پارامترها، تاثیر تغییرات را بر روی مقدار بهینه درآمد و میانگین هدف به‌دست آمد که نتایج در **جدول ۳** تا **جدول ۷** قابل مشاهده است.

درصد تغییرات در **جدول ۳** تا **جدول ۶**با توجه به مقدارهای به‌دست آمده در قسمت ۳-۲ محاسبه شده است. با توجه به مقدارهای به‌دست آمده در **جدول ۳** تا **جدول ۶**، افزایش یا کاهش - پارامترهای $A_2$، $a_2$، $c_1$ و $c_0$ تاثیر به سزایی بر روی مقدار بهینه میانگین هدف نداشته‌اند.

بیشترین تاثیرگذاری ناشی از تغییر ۵۰٪ در پارامتر $A_1$ است، به‌طوری که با تغییر آن همان‌گونه که در **جدول ۴** مشاهده می‌شود، شاهد درصد تغییری بالای ۸۰٪ بر روی مقدار بهینه سود ($EP^*$) هستیم. باید به این نکته توجه کرد که درصدهای منفی در **جدول ۵** و **جدول ۶** نشان‌دهنده تاثیر منفی و یا در واقع کاهش مقدار میانگین هدف یا بهینه سود است.

علاوه بر انجام تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای ثابت در مدل بر روی انحراف استاندارد (σ) کیفیت نیز تحلیل حساسیتی انجام شد که نتایج در **جدول ۷** آورده شده است. با توجه به نتایجی که در **جدول ۷** مشاهده می‌شود با تغییرات ۲۰٪ و ۵۰٪ که بر روی پارامتر انحراف استاندارد توزیع نرمال انجام شد، شاهد تغییر زیادی در مقدار $EP^*$ و $\mu^*$ نیستیم، به‌گونه‌ای که تمام تغییرات به‌دست آمده کمتر از ۲۰٪ بوده است.

بنابراین با توجه به تحلیل حساسیت‌هایی که بر روی پارامترهای موجود در **مدل (۲۲)** انجام شد نتیجه‌ای که در انتها حاصل شد تاثیر نه‌چندان زیاد تغییرات این پارامترها بر روی مقدار $\mu^*$ بود، با توجه به این نکته، در این مقاله سعی شد که با انجام تغییرات ۲۰٪ و ۵۰٪ تغییرات کوچک و تقریبا بزرگ لحاظ شود و می‌توان دلیل عدم تغییرات زیاد را مقاوم‌بودن میانگین بهینه در برابر تغییرات کوچک پارامترها دانست.

جدول ۳- تحلیل حساسیت انجام‌شده بر روی پارامترهای $A_1$ ،$A_2$، $a_1$ و $a_2$ با افزایش و کاهش ۲۰٪.

**Table 3- Sensitivity analysis performed on parameters $A_1$, $A_2$, $a_1$ and $a_2$ with an increase and decrease of 20 percent.**

| پارامتر | $A_1$ | | $A_2$ | | $a_1$ | | $a_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| میزان تغییر | ۲۰٪ کاهش | ۲۰٪ کاهش | ۲۰٪ کاهش | ۲۰٪ کاهش | ۲۰٪ کاهش | ۲۰٪ کاهش | ۲۰٪ کاهش | ۲۰٪ کاهش |
| مقدار $EP^*$ جدید | 4560 | 2405 | 3690 | 3690 | 3651 | 3748 | 3690 | 3690 |
| درصد تغییر در $EP^*$ | 2.3 | 3.4 | 0 | 0 | 1 | 1.5 | 0 | 0 |
| مقدار $\mu^*$ جدید | 43.5 | 42.5 | 43.5 | ۴۳/۵ | 42.5 | 44 | 43.5 | 43.5 |
| درصد تغییر در $\mu^*$ | 0 | 2.2 | 0 | 0 | 2.2 | 1.1 | 0 | 0 |

جدول ۴- تحلیل حساسیت انجام‌شده بر روی پارامترهای $A_1$ ،$A_2$، $a_1$ و $a_2$ با افزایش و کاهش۵۰٪.

**Table 4- Sensitivity analysis performed on parameters $A_1$, $A_2$, $a_1$ and $a_2$ with an increase and decrease of 50%.**

| پارامتر | $A_1$ | | $A_2$ | | $a_1$ | | $a_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| میزان تغییر | ۵۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش |
| مقدار $EP^*$ جدید | 7055 | 517.5 | 3690 | 3690 | 3610 | 3912.5 | 3690 | 3690 |
| درصد تغییر در $EP^*$ | 90 | 86 | 0 | 0 | 2.1 | 6 | 0 | 0 |
| مقدار $\mu^*$ جدید | 45 | 41.5 | 43.5 | 43.5 | 42 | 46.5 | 43.5 | 43.5 |
| درصد تغییر در $\mu^*$ | 3.5 | 4.6 | 0 | 0 | 3.4 | 6.9 | 0 | 0 |

جدول ۵- تحلیل حساسیت انجام‌شده بر روی پارامترهای $c_1$ و $c_0$ ، افزایش و کاهش ۲۰٪.

**Table 5- Sensitivity analysis performed on parameters $c_1$ and $c_0$, increase and decrease of 20%.**

| پارامتر | $c_1$ | | $c_0$ | |
|---|---|---|---|---|
| میزان تغییر | ۲۰٪ کاهش | ۲۰٪ کاهش | ۲۰٪ کاهش | ۲۰٪ کاهش |
| مقدار $EP^*$ جدید | 3518 | 3864 | 3490 | 3890 |
| درصد تغییر در $EP^*$ | -5.42 | 5.42 | -4.66 | 4.71 |
| مقدار $\mu^*$ جدید | 43.5 | 43.5 | 43 | 43.5 |
| درصد تغییر در $\mu^*$ | 0 | 0 | -1.1 | 0 |

جدول ۶- تحلیل حساسیت انجام‌شده بر روی پارامترهای $c_1$ و $c_0$ ، افزایش و کاهش ۵۰٪.

**Table 6- Sensitivity analysis performed on parameters $c_1$ and $c_0$, increase and decrease of 50%.**

| پارامتر | $c_1$ | | $c_0$ | |
|---|---|---|---|---|
| میزان تغییر | ۵۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش |
| مقدار $EP^*$ جدید | 3260 | 4125 | 3190 | 4190 |
| درصد تغییر در $EP^*$ | -11.65 | 11.78 | -13.55 | 13.55 |
| مقدار $\mu^*$ جدید | 43 | 43.5 | 43.5 | 43.5 |
| درصد تغییر در $\mu^*$ | 0 | -1.1 | 0 | 0 |

جدول ۷- تحلیل حساسیت انجام‌شده بر روی $\sigma$ با افزایش و کاهش ۲۰٪ و ۵۰٪.

**Table 7- Sensitivity analysis performed on σ with an increase and decrease of 20% and 50%.**

| پارامتر | σ | | σ | |
|---|---|---|---|---|
| میزان تغییر | ۲۰٪ کاهش | ۲۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش | ۵۰٪ کاهش |
| مقدار $EP^*$ جدید | 3697.2 | 3681.2 | 3705 | 3 |
| درصد تغییر در $EP^*$ | 0.19 | 0.26 | 0.4 | 0.6 |
| مقدار $\mu^*$ جدید | 43.5 | 43 | 43.5 | 43 |
| درصد تغییر در $\mu^*$ | 0 | 1.1 | 0 | 1.1 |

## ۴- نتیجه‌گیری و پیشنهادهای آتی

در این مقاله ما مدلی را برای به‌دست آوردن مقدار بهینه میانگین هدف را با اعمال شرایطی کاملا جدید از جمله مدل‌سازی احتمالی فرآیند تولید در قالب زنجیره مارکوف جاذب که باعث نزدیک‌شدن شرایط مدل به شرایط دنیای واقعی شد و همچنین درنظر گرفتن چندین بازارها به دو بازار، به‌دست آوردیم. هدف اصلی ما در این مقاله مدل‌سازی و ایجاد ارتباط بین کیفیت در محیط کار با بحث فرآیند تولید که دوشاخه مهم و بسیار کاربردی در رشته‌های صنایع هستند می‌باشد. اساس مدل پیشنهادی، غیرقطعی بودن متغیرهای کیفی به دلیل وجود شرایط و عوامل تاثیرگذار با دلیل و بی‌دلیل گوناگون در محیط‌های تولیدی می‌باشد.

با توجه به نتایج به‌دست آمده از مثال عددی، مشاهده می‌شود که درنظر گرفتن مدل احتمالی مساله تولید در رویکرد پیشنهادی باعث نزدیک‌تر شدن نتایج به دنیای واقعی شده است و همچنین بررسی پارامترهای موجود در مدل با انجام تحلیل حساسیت بر روی آن‌ها تاثیرگذاری خیلی کم آن‌ها بر روی مقدار بهینه میانگین کیفیت را حاکی می‌شود که درنتیجه می‌توان از ترانس‌های کوچک در میانگین بهینه صرف‌نظر کرد. در انتها برای ادامه کار برای آیندگان می‌توان درنظر گرفتن پارامترهای فازی در مدل و درنظر گرفتن محدودیت‌های بودجه‌ای و زمان تولید را در مدل پیشنهاد کرد.

## منابع

[1] Hunter, W. G., & Kartha, C. P. (1977). Determining the most profitable target value for a production process. *Journal of quality technology*, *9*(4), 176–181. https://doi.org/10.1080/00224065.1977.11980794
[2] Bisgaard, S., Hunter, W. G., & Pallesen, L. (1984). Economic selection of quality manufactured product. *Technometrics*, *26*(1), 9–18. https://doi.org/10.1080/00401706.1984.10487917
[3] Golhar, D. Y. (1987). Determination of the best mean contents for a canning problem. *Journal of quality technology*, *19*(2), 82–84. https://doi.org/10.1080/00224065.1987.11979042
[4] Boucher, T. O., & Jafari, M. A. (1991). The optimum target value for single filling operations with quality sampling plans. *Journal of quality technology*, *23*(1), 44–47. https://doi.org/10.1080/00224065.1991.11979282
[5] Al-Sultan, K. S. (1994). An algorithm for the determination of the optimum target values for two machines in series with quality sampling plans. *The international journal of production research*, *32*(1), 37–45. https://doi.org/10.1080/00207549408956914
[6] Tang, K., & LO, J. J. (1993). Determination of the optimal process mean when inspection is based on a correlated variable. *IIE transactions*, *25*(3), 66–72. https://doi.org/10.1080/07408179308964292
[7] Hong, S. H. (1999). Optimum mean value and screening limits for production processes with multi-class screening. *International journal of production research*, *37*(1), 155–163. https://doi.org/10.1080/002075499191986
[8] Lee, M. K., Hong, S. H., & Elsayed, E. A. (2001). The optimum target value under single and two-stage screenings. *Journal of quality technology*, *33*(4), 506–514. https://doi.org/10.1080/00224065.2001.11980108
[9] Lee, M. K., & Elsayed, E. A. (2002). Process mean and screening limits for filling processes under two-stage screening procedure. *European journal of operational research*, *138*(1), 118–126. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00128-X
[10] Rahim, M. A., & Al-Sultan, K. S. (2000). Joint determination of the optimum target mean and variance of a process. *Journal of quality in maintenance engineering*, *6*(3), 192–199. https://doi.org/10.1108/13552510010341207
[11] Rahim, M. A., & Tuffaha, F. (2004). Integrated model for determining the optimal initial settings of the process mean and the optimal production run assuming quadratic loss functions. *International journal of production research*, *42*(16), 3281–3300. https://doi.org/10.1080/00207540410001666233
[12] Kim, Y. J., Cho, B. R., & Phillips, M. D. (2000). Determination of the optimal process mean with the consideration of variance reduction and process capability. *Quality engineering*, *13*(2), 251–260. https://doi.org/10.1080/08982110108918648
[13] Teeravaraprug, J., & Cho, B. R. (2002). Designing the optimal process target levels for multiple quality characteristics. *International journal of production research*, *40*(1), 37–54. https://doi.org/10.1080/00207540110073046
[14] Phillips, M. D., & Cho, B. R. (2000). A nonlinear model for determining the most economic process mean under a beta distribution. *International journal of reliability, quality and safety engineering*, *7*(01), 61–74. https://doi.org/10.1142/S0218539300000067
[15] Arcelus, F. J., & Rahim, M. A. (1991). Joint determination of optimum variable and attribute target means. *Naval research logistics (NRL)*, *38*(6), 851–864. https://doi.org/10.1002/nav.3800380605
[16] Arcelus, F. J., & Rahim, M. A. (1994). Simultaneous economic selection of a variables and an attribute target mean. *Journal of quality technology*, *26*(2), 125–133. https://doi.org/10.1080/00224065.1994.11979512
[17] Rahim, M. A., Bhadury, J., & Al-Sultan, K. S. (2002). Joint economic selection of target mean and variance. *Engineering optimization*, *34*(1), 1–14. https://doi.org/10.1080/03052150210913
[18] Bowling, S. R., Khasawneh, M. T., Kaewkuekool, S., & Cho, B. R. (2004). A Markovian approach to determining optimum process target levels for a multi-stage serial production system. *European journal of operational research*, *159*(3), 636–650. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(03)00429-6
[19] Case, K. E., & Bennett, G. K. (1977). The economic effect of measurement error on variables acceptance sampling. *THE international journal of production research*, *15*(2), 117–128. https://doi.org/10.1080/00207547708943110

[20] Owen, D. B., & Chou, Y. M. (1983). Effect of measurement error and instrument bias on operating characteristics for variables sampling plans. *Journal of quality technology*, *15*(3), 107–117. https://doi.org/10.1080/00224065.1983.11978857
[21] Kanazuka, T. (1986). The effect of measurement error on the power of X-R charts. *Journal of quality technology*, *18*(2), 91–95. https://doi.org/10.1080/00224065.1986.11978992
[22] Tang, K., & Schneider, H. (1990). Cost effectiveness of using a correlated variable in a complete inspection plan when inspection error is present. *Naval research logistics (nrl)*, *37*(6), 893–904. https://doi.org/10.1002/1520-6750(199012)37:6%3C893::AID-NAV3220370608%3E3.0.CO;2-B
[23] Tsai, H. T., Moskowitz, H., & Tang, J. E. N. (1995). A one-sided single screening procedure based on individual unit misclassification error. *IIE transactions*, *27*(6), 695–706. https://doi.org/10.1080/07408179508936786
[24] Chen, S. L., & Chung, K. J. (1996). Selection of the optimal precision level and target value for a production process: the lower-specification-limit case. *IIE transactions*, *28*(12), 979–985. https://doi.org/10.1080/15458830.1996.11770752
[25] Hong, S. H., & Elsayed, E. A. (1999). The optimum mean for processes with normally distributed measurement error. *Journal of quality technology*, *31*(3), 338–344. https://doi.org/10.1080/00224065.1999.11979932
[26] Duffuaa, S. O., & Siddiqui, A. W. (2003). Process targeting with multi-class screening and measurement error. *International journal of production research*, *41*(7), 1373–1391. http://dx.doi.org/10.1080/00207540701644243
[27] Hong, S. H., & Cho, B. R. (2007). Joint optimization of process target mean and tolerance limits with measurement errors under multi-decision alternatives. *European journal of operational research*, *183*(1), 327–335. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.09.063
[28] Chen, C. H., & Lai, M. T. (2007). Determining the optimum process mean based on quadratic quality loss function and rectifying inspection plan. *European journal of operational research*, *182*(2), 755–763. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.09.035
[29] Lee, M. K., Kwon, H. M., Hong, S. H., & Kim, Y. J. (2007). Determination of the optimum target value for a production process with multiple products. *International journal of production economics*, *107*(1), 173–178. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2006.08.007
[30] Chen, C. H., & Khoo, M. B. C. (2009). Optimum process mean and manufacturing quantity settings for serial production system under the quality loss and rectifying inspection plan. *Computers & industrial engineering*, *57*(3), 1080–1088. https://doi.org/10.1016/j.cie.2009.04.016
[31] Goethals, P. L., & Cho, B. R. (2011). Reverse programming the optimal process mean problem to identify a factor space profile. *European journal of operational research*, *215*(1), 204–217. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.06.004
[32] Darwish, M. A., Abdulmalek, F., & Alkhedher, M. (2013). Optimal selection of process mean for a stochastic inventory model. *European journal of operational research*, *226*(3), 481–490. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.11.022
[33] Nezhad, M. S. F., & Nasab, H. H. (2012). Absorbing Markov chain models to determine optimum process target levels in production systems with dual correlated quality characteristics. *Pakistan journal of statistics and operation research*, *8*(2), 205–212. https://doi.org/10.18187/pjsor.v8i2.268
[34] Fallah, N. M. S., & Akhavan, N. S. T. (2010). Absorbing Markov chain models to determine optimum process target levels in production systems with rework and scrapping. *Journal of industrial engineering*, *6*(2010), 1–6. https://www.sid.ir/EN/VEWSSID/J_pdf/1029920100601.pdf